Primer Parcial de Álgebra II

Ejercicio 1. Sea G un grupo. Probar que si $\mathrm{Aut}(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano. (Sugerencia: considere el grupo de automorfismos de la forma c_g - conjugar por g).

Solución1. Consideremos el morfismo $c : G \to Aut(G)$ que a cada $g \in G$ le asigna su conjugación asociada. Por el ejercicio 15 de la Práctica 1, sabemos que

$$\ker(c) = Z(G).$$

Por otro lado, como $Aut(G)$ es cíclico, $\mathrm{Im}(c) \trianglelefteq Aut(G)$ también lo es. Observemos que por el teorema de isomorfismo,

$$G/Z(G) \simeq \mathrm{Im}(c).$$

Probemos ahora que G es abeliano. Sean $g_1, g_2 \in G$ y $\bar{g}$ un generador de $G/Z(G)$. Deben existir $a, b \in \mathbb{Z}$ y $z_1, z_2 \in Z(G)$ tales que

$$\begin{aligned} g_1 &= g^a z_1 \\ g_2 &= g^b z_2. \end{aligned}$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= (g^a z_1)(g^b z_2) = g^{a+b} z_1 z_2 \\ &= (g^b z_2)(g^a z_1) = g_2 g_1. \end{aligned}$$

Luego, G es abeliano.

Nota: Las ideas de esta solución están en la Clase Practica 6. □

Solución2. Consideremos el morfismo $c : G \to Aut(G)$ que a cada $g \in G$ le asigna su conjugación asociada. Por el ejercicio 15 de la Práctica 1, sabemos que

$$\ker(c) = Z(G).$$

Por otro lado, como $Aut(G)$ es cíclico, $\mathrm{Im}(c) \trianglelefteq Aut(G)$ también lo es. Sea $g \in G$ un elemento tal que $\mathrm{Im}(c) = \langle c(g) \rangle$.

Sea $h \in G$. Debe existir un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $c(g)^n = c(h)$. Entonces

$$hgh^{-1} = c(h)(g) = c(g)^n(g) = g,$$

es decir, h conmuta con g. Como esto vale para todo elemento $h \in G$, debe ser $c(g) = id_G$. Pero esto implica que $\mathrm{Im}(c) = \{id_G\}$ y por lo tanto $Z(G) = G$, i.e., G es abeliano. □

Ejercicio 2. Consideremos el subgrupo de $G = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{S}_7$

$$H = \{(a, b, c, \sigma) : a = 0,\ 17|b + c,\ \sigma \in \mathbb{A}_7\}.$$

(a) Probar que H es normal y caracterizar el cociente G/H.

(b) ¿Existe algún subgrupo normal K de G tal que $H \cap K = \{1\}$ y $G = H.K$?

Solución. a) Sea $f : G \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ el morfismo definido por

$$(a, b, c, \sigma) \mapsto (a, b + c, sg(\sigma)).$$

De las definiciones se sigue que $\ker(f) = H$, de modo que H es un subgrupo normal de G. Por otro lado, es fácil ver que f es un epimorfismo (hacer la cuenta) asi que por el teorema de isomorfismo tenemos

$$G/H \simeq \mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

b) Si existiese dicho subgrupo, el grupo G sería isomorfo al producto $H \times K$ (ejercicio 34, Práctica 1). Así,

$$K \simeq (H \times K)/H \simeq G/H \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Afirmo: G no tiene elementos de orden 17. Si (a, b, c, σ) es un elemento tal que $(a, b, c, \sigma)^{17} = e$, entonces $a = b = c = 0$ y $\sigma^{17} = 1$. Pero entonces $ord(\sigma)|7! = |\mathbb{S}_7|$ y $ord(\sigma)|17$, de modo que $ord(\sigma) = 1$ y por lo tanto $(a, b, c, \sigma) = e$.

Esto contradice la existencia de K, ya que el elemento $(0, 1, 0) \in K$ sería un elemento de G de orden 17. □

Ejercicio 3. Sea A un anillo conmutativo. Decimos que dos ideales $I, J \subset A$ son *coprimos* entre sí cuando $A = I + J$. Supongamos que $I_1, \ldots, I_r \subseteq A$ son ideales coprimos dos a dos.

(a) Probar que $I_1 \cdots I_r = I_1 \cap \cdots \cap I_r$.

(b) Demuestre que $A/I_1 \cdots I_r \simeq A/I_1 \times \cdots \times A/I_r$.

Solución. Ver en [AM69, Proposition 1.10, pág. 7]. □

Ejercicio 4. Sea A un dominio íntegro. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe una valuación discreta $v : \mathcal{K}(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tal que

$$A = \{x : v(x) \geq 0\} \subseteq \mathcal{K}(A).$$

(b) A es un domínio euclídeo local.

(c) A es un dominio de ideales principales local.

Solución. Las implicaciones $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ fueron hechas en clase. Pasemos a probar la implicación $(c) \Rightarrow (a)$. Como A es un dominio de ideales principales local, su único ideal maximal es de la forma $\mathfrak{m} = (t)$.

Afirmación. Todo $x \in A$ no nulo se escribe de manera única como $x = ut^{\nu(x)}$ con $u \in \mathcal{U}(A)$ y $\nu(x) \geqslant 0$.

Demostración de la afirmación. En efecto, consideremos $\nu(x) = \text{máx}\{k \geqslant 0 : x \in \mathfrak{m}^k\}$ donde $\mathfrak{m}^0 = A$ por convención. Como $x \in \mathfrak{m}^{\nu(x)}$, podemos encontrar una escritura $x = ut^{\nu(x)}$. Si u no fuese una unidad, entonces $u \in A \setminus \mathcal{U}(A) = \mathfrak{m}$ porque A es local, lo cual es absurdo pues $x \notin \mathfrak{m}^{\nu(x)+1}$. En caso de tener dos escrituras $x = ut^k = vt^l$ con $k \leqslant l$, la ecuación $t^k(vt^{l-k} - u) = 0$ implica que $vt^{l-k} = u$. Esto solamente puede pasar cuando $k = l$ y $u = v$.

De esta manera definimos la función $\nu : \mathcal{K}(A) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ como

$$\nu\left(\frac{x}{s}\right) = \nu(x) - \nu(s).$$

Esta asignación no depende del representante elegido porque si $x/s = x'/s'$, entonces existe $s'' \in A \setminus \{0\}$ tal que $s''(xs' - x's) = 0$. Como A es un dominio íntegro podemos decir que $xs' = x's$. Aplicando ν a ambos lados concluimos que $\nu(x) + \nu(s') = \nu(x') + \nu(s)$ y por ende

$$\nu\left(\frac{x}{s}\right) = \nu(x) - \nu(s) = \nu(x') - \nu(s') = \nu\left(\frac{x'}{s'}\right).$$

Definiendo por separado $\nu(0/1) = \infty$ es fácil comprobar que $\nu : \mathcal{K}(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ resulta ser una valuación discreta. Para finalizar el ejercicio resta probar la identidad $A = \{x/s \in \mathcal{K}(A) : \nu(x/s) \geqslant 0\}$. La inclusión $(\subseteq)$ se desprende fácilmente de la definición de ν. Supongamos por otra parte que $\nu(x/s) = \nu(x) - \nu(s) \geqslant 0$. Gracias a la afirmación previa, podemos encontrar unidades $u, v \in \mathcal{U}(A)$ tales que $x = ut^{\nu(x)}$ y $s = vt^{\nu(s)}$. Entonces

$$\frac{x}{s} = \frac{ut^{\nu(x)}}{vt^{\nu(s)}} = \frac{uv^{-1}t^{\nu(x)-\nu(s)}}{1} \in A.$$

$\square$

Ejercicio 5. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y consideremos el anillo $A = \text{End}_K(V)$. Para cada subespacio vectorial $U \subset V$ definimos

$$I_U = \{f \in A : U \subset \ker(f)\}, \quad D_U = \{f \in A : \text{im}(f) \subset U\}.$$

(a) Demostrar que I_U es un ideal a izquierda y D_U es un ideal a derecha.

(b) Todo ideal a izquierda (resp. derecha) de A es igual a I_U (resp. D_U) para algún subespacio U.

(c) A tiene exactamente dos ideales biláteros.

Solución. Esto es el ejercicio 10 de la Práctica 2. $\square$

Referencias

[AM69] Michael F. Atiyah and Ian G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra. Adison*. Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1969.